

難関文系数学 サクッと最終3演習【5】

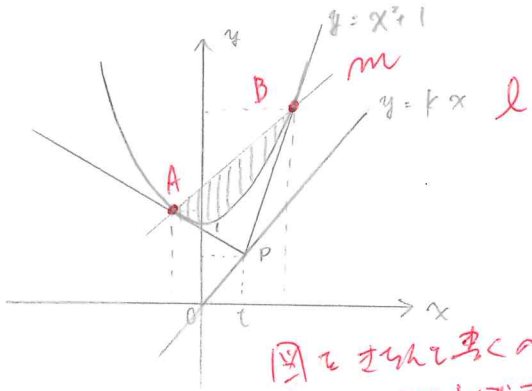
16/20
Very Good!

氏名 _____

1 xy 平面上に直線 $l: y = kx$ (k は $|k| < 2$ を満たす実数定数) と放物線 $C: y = x^2 + 1$ がある。 l 上の点 $P(t, kt)$ から C に2本の接線を引き、2つの接点を通る直線を m とする。

(1) m の方程式を求めよ。

(2) C と m で囲まれる図形の面積を S とする。点 P が l 上を動くとき、 S の最小値を求めよ。



図を参考に書くのは
楽な気がするよ！
good!

(1) 接線 l の接点を $A(a, a^2 + 1)$ とする。

$y' = 2x$ より接線の方程式は

$$y = 2ax - a^2 + 1$$

これが $P(t, kt)$ を通るから

$$kt = 2at - a^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ta + kt - 1 = 0$$

$a = t + \sqrt{t^2 - kt + 1}$ における y 座標は

$$y = (t + \sqrt{t^2 - kt + 1})^2 + 1 = 2t^2 - (k - 2\sqrt{t^2 - kt + 1})t + 2$$

$a = t - \sqrt{t^2 - kt + 1}$ における y 座標は

$$y = (t - \sqrt{t^2 - kt + 1})^2 + 1 = 2t^2 - (k + 2\sqrt{t^2 - kt + 1})t + 2$$

$t > 0$ のとき2つの接点の座標は

$$(t + \sqrt{t^2 - kt + 1}, 2t^2 - (k - 2\sqrt{t^2 - kt + 1})t + 2)$$

$$(t - \sqrt{t^2 - kt + 1}, 2t^2 - (k + 2\sqrt{t^2 - kt + 1})t + 2)$$

$$m: y = \frac{4t\sqrt{t^2 - kt + 1}}{2\sqrt{t^2 - kt + 1}} \{x - (t - \sqrt{t^2 - kt + 1})\} + 2t^2 - (k + 2\sqrt{t^2 - kt + 1})t + 2 = 2tx - kt + 2 \quad (\text{答})$$

(2) $|k| < 2$ より $-2 < k < 2$

これは常に C の下側にある。

m と C の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2 + 2tx + (-kt)) dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$\alpha = t - \sqrt{t^2 - kt + 1}, \beta = t + \sqrt{t^2 - kt + 1}$$

$$S = \frac{1}{6} (2\sqrt{t^2 - kt + 1})^3$$

$$= \frac{8}{3} (t^2 - kt + 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3} \left\{ \left(t - \frac{k}{2}\right)^2 + \left| -\frac{k^2}{4} \right| \right\}^{\frac{3}{2}}$$

なぜ? $|k| < 2$ は? l と C の関係は?

S の最小値は $\frac{4}{3} (1 - \frac{k^2}{4})^{\frac{3}{2}}$ (答)

(*) の箇所は可。

$(\beta - \alpha)^3$ の計算は、今回のように
他の複雑な場合は、

$$(\beta - \alpha)^3 = \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

解と係数の利用

工夫はあり可。



積分の計算は
楽だね!!

同様に
2つ