東京大学（文科）
2017年度　解答速報

西荻塾　数学科

【第1問】
A と B がただ1点を共有することから，

$$s(x-1)^2=-x^2+t^2 \iff (s+1)x^2-2sx+s-t^2=0 \text{ について，}$$

$$\frac{D}{4}=s^2-(s+1)(s-t^2)=0$$
$$\iff s=\frac{t^2}{1-t^2}\cdots(*)$$

（$s>0$ に注意しつつ)

$$P=\int_0^1 s(x-1)^2dx=\left[\frac{s}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\frac{s}{3}$$
$$Q=\int_0^t(-x^2+t^2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+t^2x\right]_0^t=\frac{2t^3}{3}$$

よって，

$$\frac{Q}{P}=f(t)=\frac{2t^3}{s}=2t^3\cdot\frac{1-t^2}{t^2}=2t-2t^3\text{（}(*)\text{ より）}$$
$$f'(t)=2-6t^2=2(1-3t^2)$$

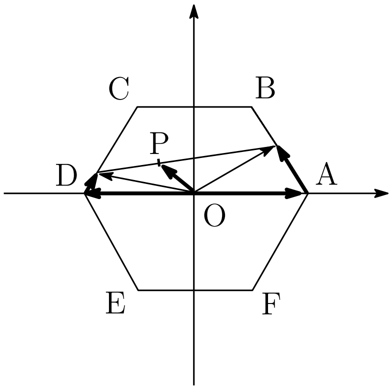
これより，$f(t)$ の $0<t<1$ における増減は，下記のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$f(t)$ の最大値は，$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

コメント： 10分前後であっさり片付く。教科書章末問題やチャート式（黄色）問題レベルである。場合分けでもさせるかと思ったが，結局そんなこともない。計算に負ける要素も少なく，東大に合格するなら本問においては，わずかなミスも許されない。確実に20点を得点したい。

【第 2 問】



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ (0\leqq\alpha\leqq 1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{DC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0\leqq\beta\leqq 1)$$

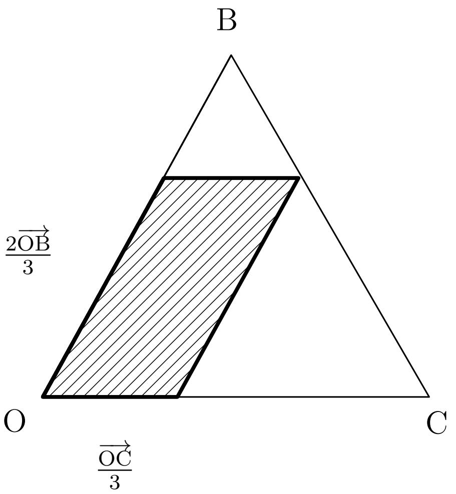
とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{3}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}+\beta\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$

ここで、

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\alpha\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}+\beta\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$

とすると、S が描く図形と、R が動く図形は合同であるから、S の動きを捉えると、下図のようになる。



よって、求める面積は、$4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{9}$

コメント : 様々な解法が考えられる。座標や複素数平面（数学 III）によるのも手である。今回の解答は，ベクトルで解いてみた（後日複素数でも解いてみる）。文系の問題であるから，ベクトルで解答を作成したが，このベクトルや複素数は，要素をカタマリとして扱うことのできる便利なツールである。座標でやるとやや計算が煩雑となるところだから，是非ともそういうツールで解決してほしい。ベクトル方程式（領域）は無論，教科書にも載っている。※図のつたなさは徐々に TEX で修正中。

【問題 3】
(1)
$(1,0),(0,-1)$ のいずれかに移動する場合である。∴ $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$
(2)
(b) の作業のうち，

(S) $(m,n)\longrightarrow(m,n+1)$ または $(m-1,n)$ の動き

(T) $(m,n)\longrightarrow(m+1,n)$ または $(m,n-1)$ の動き

と設定する。
ある点からはじめて，S，T の動きが同回数となれば，その点は，同一直線上に戻る。初期では，$y=x$ 上にあるから，6 秒後に $y=x$ に戻るには，S，T は 3 回ずつである。

よって，求める確率は，${}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{16}$

コメント：格子状の道順問題のような問題であり，問題文の設定は把握しやすい。全部数えてもそれほど大変ではないので，それでもいいと私は思う（そうやって手を動かせば，規則性に気づくこともあろう）。もっとも，(1) であえて，$t-s$ という表記にしたのには，明らかに意味があるので，$(1,0),(0,-1)$ で終わりだ！と思考停止しないこと。解答は，(1) の意味を考える方法で作成した。(1) の 2 点の捉え方は，そういう位置関係にある 2 点をセットで捉えればよいということにある。すなわち，1 秒後の $(-1,0),(0,1)$ もセットで捉える。縦方向の動きと横方向の動きの割合は同じでなければないから，それを同時に捉えた，傾き 1 の斜線の動きで捉えればよい。

【設問 4】

(1)

$a_1 = 4,\ a_2 = 18$

(2)

$$a_1 a_n = \left\{p + \left(-\frac{1}{p}\right)\right\}\left\{p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n\right\} = p^{n+1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1} - \left\{p^{n-1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}\right\} = a_{n+1} - a_{n-1}$$

(3)

(2) より，$a_{k+1} = a_{k-1} + 4a_k(k \geqq 2$ の自然数$) \cdots (*)$ となる。

(i) $a_1,\ a_2$は自然数である。$\because$ (1)

(ii) $a_{k-1},\ a_k$が自然数となると仮定すると, $(*)$ より，明らかに a_{k+1}は自然数となる。

以上より，帰納的に a_nは自然数である。

(4)

最大公約数は，(1) より，2 であると推定される。

a_n, a_{n+1}が最大公約数 p を持つとする。すなわち, $a_n = pb_n,\ a_{n+1} = pb_{n+1}$とすると,(2）より，

$$a_{n-1} = p(b_{n+1} - 4b_n)$$

となる。よって，a_{n-1}は p を公約数に持つ。したがって，これを繰り返し適用すると，すべての $a_n(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は帰納的にすべて公約数 p を持つことになる。

ここで, a_1, a_2の最大公約数は 2 である。

また, (3) の $(*)$ 式から, a_1, a_2が偶数で, $a_{k-1},\ a_k$が偶数となると仮定すると，明らかに a_{k+1}は偶数となる。したがって，帰納的に a_nはすべて偶数であり，最大公約数が 1 になることはない。

以上より, $p = 2$ として, 2 を公約数にしうる。そして, 2 が最大であることが示された。

コメント：(3）までは，普通の問題である。西荻塾のセレクトシリーズでも同様の帰納法を取り扱ったことがあるし，難関大受験生なら，隣接 2 項以外の帰納法の証明は必須である。(4）は，a_1, a_2があるから，最大公約数が 2 であることの推定は容易である（ただし, 1 かもしれないことは考慮に残しておくこと)。あとは，これをどう証明するかがポイントとなり，そこが少し難しいかもしれないが，素数を題材とした論証問題などで，最大公約数 p をおくことはよくある。この辺の経験値を地道に積み重ねていればなんとかひねり出せたのではないだろうか。