

# 高校3年ハイレベル数学 春期講習演習1(50分)

氏名 \_\_\_\_\_

- ①  $\sin \theta + \cos \theta = t$  とおくと、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$  の値を  $t$  を用いて表せ。また  $\theta$  が  $0 \leq \theta < 2\pi$  を動くときの最大値、最小値を求めよ。[01 近畿大 医]

□ 3次関数  $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + c$  が次の条件 (1), (2) をみたすとき  $a, b, c$  の値を求めよ。

(1)  $f(x)$  は  $x = \alpha, x = \beta$  で極値をとり、2点  $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$  は点  $(0, 1)$  に関して点対称である。

(2)  $|f(\alpha) - f(\beta)| = \frac{4}{9}$

3 関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  が  $x > 0$  の範囲に極大値を持つような点  $(a, b)$  の存在する領域を  $ab$  平面に図示せよ。

高校3年ハイレベル数学 春期講習演習2(50分)

氏名 \_\_\_\_\_

- 1 関数  $f(x) = x^3 + 3(a+1)x^2 + 6(a^2-1)x$  の極大値と極小値の和  $g(a)$  の最大値を求めよ。[新潟大]

2 点  $(2, 2)$  から , 曲線  $y = x^3 - x$  に引いた接線の接点の  $x$  座標を求めよ。

3 次の問に答えよ。

(1)  $x$  の方程式  $2x^3 - 3ax^2 + a + b = 0$  が相異なる 3 つの実数解を持つとき、 $a, b$  の間に成り立つ条件を求めよ。

(2) 曲線  $y = x^3 - x$  に点  $P(a, b)$  から接線が 3 本引けるとき、点  $P$  の存在範囲を  $ab$  平面に図示せよ。

高校3年ハイレベル数学 春期講習演習3 (35分)

氏名 \_\_\_\_\_

- 1 全ての  $x \geq 0$  について  $x^3 \geq a(x^2 - a)$  が成り立つような実数  $a$  の範囲を求めよ。[東海大 医]

2  $4 \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + p = 0$  において実数  $p$  が変化するとき, この方程式を満たす  $\theta$  の個数はどのように変わるか。ただし  $\theta$  は  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  とする。[弘前大]



高校3年ハイレベル数学 春期講習演習4 (50分)

氏名 \_\_\_\_\_

- 1 次の関係式を満たす  $f(x)$  を求めよ。

$$f(x) = 1 + \int_0^1 (x-t)f(t)dt$$

2 点  $P(a, b)$  ( $b > a^2$ ) が与えられている。放物線  $y = -x^2$  を平行移動して点  $P(a, b)$  を通るようにしたものと、放物線  $y = x^2$  とで囲まれる部分の面積の最小値を求めよ。

3 曲線  $y = f(x) = x(x - 1)(x - 3)$  と直線  $l: y = ax$  とがある。  $a < 3$  のとき、曲線  $y = f(x)$  と直線  $l$  とで囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるように  $a$  の値を求めよ。

# 高校3年ハイレベル数学 春期講習演習5 (50分)

氏名 \_\_\_\_\_

□1  $a$  は任意の正の実数とする。[鹿児島大]

(1) 定積分  $\int_0^1 |x^2 - ax| dx$  の値  $f(a)$  を求めよ。

(2)  $a$  を変化させるとき  $f(a)$  の最小値とそのときの  $a$  の値を求めよ。

2 整式  $f(x)$  はある定数  $a$  に対して

$$\int_a^x \{f(t)\}^2 dt = x^2 f(x) + 3$$

を満たしている。このとき、 $f(x)$  と  $a$  を求めよ。

3 放物線  $y = x^2$  と点  $(a, b)$  を頂点とする放物線  $y = -(x - a)^2 + b$  とが交わり, それらで囲まれる部分の面積が常に  $\frac{8}{3}$  であるとき, 点  $(a, b)$  の軌跡を求めよ。

# 高校3年ハイレベル数学 春期講習演習6(50分)

氏名 \_\_\_\_\_

- 1 変数  $x$  が  $0 \leq x \leq \pi$  の範囲を動くとき, 関数  $f(x) = 5(\sin x - \cos x)^3 - 6 \sin 2x$  の最大値と最小値を求めよ。[鹿児島大]

□  $S(a) = \int_{a-1}^{a+1} |3(x^2 - 4)| dx$  を最小にする  $a$  の値を求めよ。



OMAKE 3  $\sin 3x + \cos 3x = \sin x + \cos x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) を解け。[神戸大]