難関文系数学　サクッと最終3演習【5】

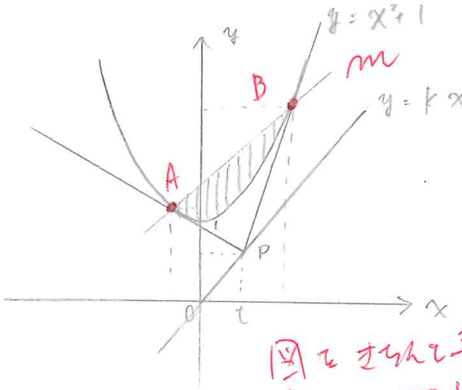
16/20
very Good!

氏名 ____________

$\boxed{1}$ xy 平面上に直線 $l : y = kx$ (k は $|k| < 2$ を満たす実数定数) と放物線 $C : y = x^2 + 1$ がある。l 上の点 $\mathrm{P}(t, kt)$ から C に2本の接線を引き，2つの接点を通る直線を m とする。

(1) m の方程式を求めよ。

(2) C と m で囲まれる図形の面積を S とする。点Pが l 上を動くとき，S の最小値を求めよ。



図をきちんと書くのは東大レベルであればキホン！

good!

(1) 接線とCの接点を $A(a,\ a^2+1)$ とする。

$y' = 2x$ より接線の方程式は

$y = 2ax - a^2 + 1$

これが $P(t,\ kt)$ を通るから

$kt = 2at - a^2 + 1$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ta + kt - 1 = 0$

$\therefore a = t \pm \sqrt{t^2 - kt + 1}$

$a = t + \sqrt{t^2 - kt + 1}$ におけるy座標は

$y = (t + \sqrt{t^2 - kt + 1})^2 + 1$

$= 2t^2 - (k - 2\sqrt{t^2 - kt + 1})t + 2$

$a = t - \sqrt{t^2 - kt + 1}$ におけるy座標は

$y = (t - \sqrt{t^2 - kt + 1})^2 + 1$

$= 2t^2 - (k + 2\sqrt{t^2 - kt + 1})t + 2$

同様にでよい

したがって2つの接点の座標は

$(t + \sqrt{t^2 - kt + 1},\ 2t^2 - (k - 2\sqrt{t^2 - kt + 1})t + 2)$

$(t - \sqrt{t^2 - kt + 1},\ 2t^2 - (k + 2\sqrt{t^2 - kt + 1})t + 2)$

よくぞこの計算に堪えた!!

よって

$$m : y = \frac{4t\sqrt{t^2 - kt + 1}}{2\sqrt{t^2 - kt + 1}}\{x - (t - \sqrt{t^2 - kt + 1})\}$$

$$+ 2t^2 - (k + 2\sqrt{t^2 - kt + 1})t + 2$$

$$= 2tx - kt + 2 \quad \text{—(答)}$$

(2) $|k| < 2$ より $-2 < k < 2$

lは常にCの下側にある。

mとCの交点のx座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とする

序盤でこうおいておけば、かなり計算ラクだっただろう。

$$S = \int_\alpha^\beta (-x^2 + 2tx + 1 - kt)\,dx$$

$$= -\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx$$

☆

$\boxed{\alpha = t - \sqrt{t^2 - kt + 1},\ \beta = t + \sqrt{t^2 - kt + 1} \text{ より}}$

$$S = \frac{1}{6}(2\sqrt{t^2 - kt + 1})^3$$

$$= \frac{4}{3}(t^2 - kt + 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\left\{\left(t - \frac{k}{2}\right)^2 + 1 - \frac{k^2}{4}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

なぜ？ $|k|<2$ は？ l とCの関係は？

よってSの最小値は $\frac{4}{3}\left(1 - \frac{k^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ —(答)

☆の箇所ですが、
$(\beta - \alpha)^3$ の計算は、今回のように値が複雑な場合は、
$(\beta - \alpha)^3 = \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$ を利用して、
解と係数を利用する工夫とかはありです。

AKAHOSHI OK!